

NOVEMBER/DECEMBER 2018

BMA21 — CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. Prove that $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$.

நிறுவுக $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$.

2. State Leibnitz Theorem.

லிபினிட்ஸ் தேற்றத்தை வரையறு.

3. Write the formula for radius of curvature in Cartesian form.

கார்டீசியன் வடிவத்தின் வளைவு ஆரத்தின் சூத்திரத்தை எழுதுக.

4. Find the angle at which the radius vector cuts the curve $\frac{1}{e} = 1 + e \cos \theta$.

$\frac{1}{e} = 1 + e \cos \theta$ என்ற வளைவரையை ஆர வெக்டர் வெட்டும் இடத்து கோணம் காண்க.

5. Define asymptote.

வரையறு : கந்தழி தொடுகோடு.

6. Prove that the asymptotes of $x^2 y^2 = c^2 (x^2 + y^2)$ are the sides of a square.

$x^2 y^2 = c^2 (x^2 + y^2)$ ன் கந்தழி தொடுகோடுகள் சதுரத்தின் பக்கங்கள் என நிறுவுக.

7. Write the reduction formula for $\int \cos^n x dx$.

$\int \cos^n x dx$ ன் குறைத்தல் வாய்ப்பாட்டை எழுதுக.

8. Define Beta function.

வரையறு : பீட்டா சார்பு.

9. Evaluate $\int_0^a \int_0^b xy(x-y) dy dx$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^a \int_0^b xy(x-y) dy dx$.

10. Evaluate $\int_0^1 \int_{y^2}^{1-x} x dz dy dx$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 \int_{y^2}^{1-x} x dz dy dx$.



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) If $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, prove that $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2a^2 xy}{(ax - y^2)^3}$.

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ எனில் $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2a^2 xy}{(ax - y^2)^3}$ என நிறுவுக.

Or

- (b) Find the maximum or minimum value of $x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$.

$x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$ -ன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

12. (a) Find $p-r$ equation of $r = \frac{a}{2}(1 - \cos \theta)$.

$r = \frac{a}{2}(1 - \cos \theta)$ என்ற சூத்திரத்திற்கு $p-r$ ஐ காண்க.

Or

- (b) Find the radius of the curvature of the curve $r = a(1 - \cos \theta)$.

$r = a(1 - \cos \theta)$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரம் காண்க.

13. (a) Find all the asymptotes of the curve $x^3 - xy^2 + 6y^2 = 0$.

$x^3 - xy^2 + 6y^2 = 0$ ன் கந்தழி தொடுகோடுகளைக் காண்க.

Or

- (b) Show that the parabola $y^2 = 4ax$ has no asymptotes.

$y^2 = 4ax$ ன்ரு கந்தழி தொடுகோடுகள் இல்லை என நிறுவுக.

14. (a) If n is positive integer, and if $I_n = \int \sin^n x dx$, then prove that

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$

n மிகை முழு மற்றும் $I_n = \int \sin^n x dx$ எனில்

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-1} \text{ என நிறுவுக.}$$

Or

- (b) Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ in terms of Gamma functions and evaluate the integral

$$\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx.$$

$\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ ஐ காமா சார்பாக எழுதுக மற்றும் $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx$ மதிப்பிடுக.

15. (a) Find the area of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$.

$r = a(1 + \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சுவளைவரையின் பரப்பு காண்க.

Or

(b) Evaluate $\int_0^a \int_{x^2/a}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$.

மதிப்பிடுக: $\int_0^a \int_{x^2/a}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If $y = \sin[\log(x^2 + 2x + 1)]$ prove
 $(1+x)^2 y_{n+2} + (2n+1)(1+x)y_{n+1} + (n^2 + 4)y_n = 0$.
 $y = \sin[\log(x^2 + 2x + 1)]$ எனில்
 $(1+x)^2 y_{n+2} + (2n+1)(1+x)y_{n+1} + (n^2 + 4)y_n = 0$ என
 நிறுவுக.

17. Show that the radius of curvature at any point of
 the catenary $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ is equal to the length
 of the portion of the normal intercepted between
 the curve and the axis of x .

$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ என்ற சங்கிலியத்தின் ஏதேனும் ஒரு
 புள்ளியில் வளைவு ஆரமானது x அச்சிற்கும்
 வளைவரைக்கும் இடைப்பட்ட செங்கோட்டின்
 வெட்டுத்துண்டின் நீளத்திற்கு சமம் என நிறுவுக.

18. Find the asymptotes of $(x-y)^2(x-2y)(x-3y) - 2a(x^3 - y^3) - 2a^2(x+y)(x-2y) = 0$.

$(x-y)^2(x-2y)(x-3y) - 2a(x^3 - y^3) - 2a^2(x+y)(x-2y) = 0$ ன் கந்தழி தொடுகோடுகளைக் காண்க.

19. If m, n are positive integers, and if
 $I_{m,n} = \int \sin^m \cos^n x dx$, then prove that

$I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \cos^{n-1} x \sin^{m+1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$.

m, n மிகை முழுக்கள் மற்றும் $I_{m,n} = \int \sin^m \cos^n x dx$

எனில் $I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \cos^{n-1} x \sin^{m+1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$

என நிறுவுக.

20. By changing the order of integration, evaluate

$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy$.

தொகையீட்டின் வரிசையை மாற்றி $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy$ ஐ

மதிப்பிடுக.